วิชาแคลคูลัส 1

รหัสวิชา 30000-1404

ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.)

ชุดฝึกทักษะการเรียนรู้ เล่มที่ 5

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยการใช้สูตร

ธันยพร บุญเย็น

ตำแหน่ง ครู วิทยฐานะ ชำนาญการพิเศษ

คำนำ

แบบฝึกทักษะ รายวิชา แคลคูลัส 1 (30000-1404) ระดับ ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยการใช้สูตร ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของหน่วยการเรียนรู้ วิชาแคลคูลัส 1 ประกอบด้วยแบบฝึกทักษะทั้งหมด 8 เล่ม ดังนี้

เล่มที่ 1 ทฤษฎีบททวินาม
เล่มที่ 2 การแยกฟังก์ชันเศษส่วนให้เป็นเศษส่วนย่อย
เล่มที่ 3 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
เล่มที่ 4 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้กฎสี่ขั้น
เล่มที่ 5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร
เล่มที่ 6 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัยโดยใช้สูตร
เล่มที่ 7 การประยุกต์อนุพันธ์
เล่มที่ 8 ปริพันธ์ของฟังก์ชัน
เล่มที่ 9 เทคนิคการหาปริพันธ์
เล่มที่ 10 ปริพันธ์จำกัดเขตและการประยุกต์

โดยในแบบฝึกทักษะแต่ละเล่ม ประกอบด้วยผลการเรียนรู้ จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ครอบคลุมทั้งด้านความรู้ ด้านทักษะกระบวนการ และด้านคุณลักษณะ ซึ่งกิจกรรมของแบบฝึกทักษะแต่ละเล่มเสร็จสมบูรณ์ในตัวเอง ผู้เรียนสามารถใช้ได้ด้วยตนเอง

สำหรับแบบฝึกทักษะ เล่มที่ 5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร มีจุดมุ่งหมายเพื่อให้นักศึกษา สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร ที่กำหนดให้ได้ อีกทั้งยังเป็นแนวทางในการปฏิรูปกระบวนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ส่งเสริมผู้เรียนได้ฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์และแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง อันจะทำให้ผู้เรียนเกิดความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหามากยิ่งขึ้น เกิดความคงทนในการเรียนรู้และสามารถนำความรู้ที่ได้รับไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะ รายวิชาแคลคูลัส 1 เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนการสอนวิชาแคลคูลัส 1 การค้นคว้าหาความรู้ของนักศึกษา และเป็นประโยชน์ต่อผู้สนใจ เพื่อนครูและวงการศึกษาต่อไป

ธันยพร บุญเย็น

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะรายวิชาแคลคูลัส 1

สำหรับครูผู้สอน

1. ศึกษาแผนการจัดการเรียนรู้และการใช้แบฝึกทักษะ
2. ศึกษาและทำความเข้าใจเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้และการดำเนินการสอน เพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นไปตามลำดับขั้นตอน
3. ให้นรักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียน
4. ดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้
5. ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือนักศึกษาเมื่อมีปัญหา ตามความเหมาะสมกับความสามารถและศักยภาพของนักศึกษาที่แตกต่างกัน
6. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน
7. แบบฝึกทักษะเล่มนี้ใช้เวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน 1 ชั่วโมง

คำแนะนำการใช้แบบฝึกทักษะรายวิชาแคลคูลัส 1

สำหรับผู้เรียน

1. ศึกษาการใช้แบบฝึกทักษะ
2. ศึกษาจุดประสงค์การเรียนรู้ เพื่อให้ทราบว่านักศึกษา ต้องรู้และปฏิบัติสิ่งใดบ้างหลังจากจบบทเรียนแล้ว
3. ทำแบบทดสอบก่อนเรียนเพื่อตรวจสอบความรู้เดิมที่ในเรื่องที่เรียน จากนั้นตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนน
4. ศึกษาเนื้อหาและตัวอย่างให้เข้าใจ แล้วทำแบบฝึกทักษะตามลำดับขั้นตอน
5. หากไม่เข้าใจหรือมีปัญหา นนักเรียนสามารถปรึกษาและแลกเปลี่ยนองค์ความรู้
6. ทำแบบทดสอบหลังเรียนแล้วตรวจคำตอบจากเฉลยในภาคผนวกท้ายเล่มและบันทึกคะแนนแล้วเปรียบเทียบกับคะแนนทดสอบก่อนเรียน
7. หากยังมีข้อสงสัยและไม่เข้าใจให้กลับไปทบทวนบทเรียนจากแบบฝึกทักษะอีกครั้ง
8. นักศึกษาควรซื่อสัตย์ต่อตนเอง โดยไม่เปิดดูเฉลยระหว่างศึกษาแบบฝึกทักษะ เพื่อนักศึกษาจะได้พัฒนาการเรียนรู้ของตนเองอย่างเต็มความสามารถ

ผลการเรียนรู้

หาอนุพันธ์ฟังก์ชันพีชคณิตโดยการใช้สูตรได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยการใช้สูตรได้

ด้านทักษะกระบวนการ

1. การแก้ปัญหา
2. การใช้เหตุผล
3. การสื่อสาร และการนำเสนอ

ด้านคุณลักษณะ

1. ตรงต่อเวลา
2. มีวินัย ความรับผิดชอบ
3. มุ่งมั่นในการทำงาน
4. สนใจใฝ่เรียนรู้
5. มีความชื่อสัตย์ สุจริต

สมรรถนะของผู้เรียน

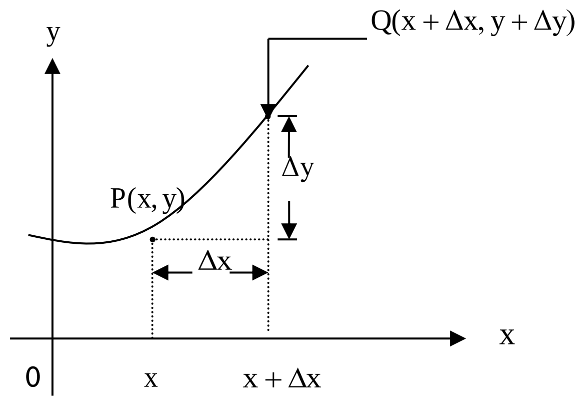
1. ความสามารถในการคิด
2. ความสามารถในการสื่อสาร
3. ความสามารถในการแก้ปัญหา

ลำดับขั้นตอนการใช้แบบฝึกทักษะสำหรับผู้เรียน

สาระสำคัญ

อัตราการเปลี่ยนแปลง

กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน $P(x,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นโค้ง $y = f(x)$ $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ เป็นจุดหนึ่งอยู่บนเส้นโค้งใกล้กับจุด P



ภาพที่ 5.1

เมื่อค่า x เปลี่ยนไปเป็น $x+\Delta x$ และ y เปลี่ยนไปเป็น $y+\Delta y$

Δx **เรียกว่า ส่วนเปลี่ยนแปลงของตัวแปร** x

$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ **เรียกว่า ส่วนเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน**

พิจารณาฟังก์ชัน $y = f(x)$ ....(1)

ถ้าให้ x เปลี่ยนแปลงไปจาก x เป็น $x+\Delta x$ และ y เปลี่ยนแปลงไปจาก y เป็น $y+\Delta y$ จากสมการ (1) จะได้

$$y+\Delta y = f(x+\Delta x) \quad \text{..(2)}$$

สมการ (2) – (1) จะได้

$$y+\Delta y - y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \quad \text{..(3)}$$

นำ Δx หารสมการที่ (3) ตลอด จะได้

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \text{..(4)}$$

เรียกสมการ (4) ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลง หรือ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันในช่วง x ถึง $x+\Delta x$

บทนิยาม 5.1 ถ้าให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ อัตราการเปลี่ยนแปลง หรืออัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันในช่วง x ถึง $x+\Delta x$ เขียนแทนด้วย $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ซึ่งกำหนดโดย

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (Differentiation of Function

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเป็นส่วนหนึ่งของแคลคูลัส ซึ่งการศึกษาเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ต้องอาศัยพื้นฐานเรื่องลิมิต คือการนำความรู้เรื่องลิมิตของฟังก์ชันใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $y = f(x)$ ที่ค่าหนึ่ง ๆ ของ x

ถ้าให้ $y = f(x)$

และ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลง หรือ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยในช่วง x หรือ $x+\Delta x$

ถ้าให้ Δx มีค่าเข้าใกล้ 0 ($\Delta x \to 0$) แล้วจะได้

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ เมื่อลิมิตนี้หาค่าได้ และจะเรียกลิมิตนี้ว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ณ ที่จุด x ใด ๆ

บทนิยาม 5.2 กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x จะเขียนแทนด้วย y' , $f'(x)$ หรือ $\frac{dy}{dx}$ ซึ่งกำหนดโดย

$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ เมื่อลิมิตนี้หาค่าได้

แบบทดสอบก่อนเรียน

รายวิชาแคลคูลัส 1 (30000-1404) **ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.)**

เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน **เล่มที่ 5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยการใช้สูตร**

****

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักศึกษาทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกที่สุด

****

1. ถ้า $y = 3x^6 + 2x^4 - 7$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $3x^5+2x^3$ ข. $3x^6 + 2x^4$

ค. $18x^5 + 8x^3$ ง. $18x^5 - 8x^3$

2. ถ้า $y = \frac{1}{2}x^6+3x^4 - 4x^2+7$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $x^5+12x^3 - 8$ ข. $3x^5 + 12x^3 - 8x$

ค. $\frac{x^5}{2}+3x^3 - 4x$ ง. $3x^5 + 7x^3 - 6x$

3. ถ้า $f(x) = 4x^2 + 5x$ แล้ว $f'(3)$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. 36 ข. 15

ค. 40 ง. 51

4. ถ้า $y = \frac{5-2x}{5+2x}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{-5}{(5+2x)^2}$ ข. $\frac{-10}{(5+2x)^2}$

ค. $\frac{-15}{(5+2x)^2}$ ง. $\frac{-20}{(5+2x)^2}$

5. กำหนดให้ $f(x) = (x^2 - 5)(3x + 4)$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $9x^2+8x - 15$ ข. $9x^2 - 8x + 15$

ค. $9x^2+8x + 15$ ง. $9x^2 - 8x - 15$

6. กำหนดให้ $y = (2x^2+5x)(3x-4)$ แล้ว $f'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. 8 ข. 12

ค. 19 ง. −19

7. ถ้า $y = \frac{x^4-5}{x^2+2}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{4x^5+8x^4+10x}{(x^2+2)^2}$ ข. $\frac{4x^5-8x^4+10x}{(x^2+2)^2}$

ค. $\frac{2x^5+8x^3+10x}{(x^2+2)^2}$ ง. $\frac{2x^5-8x^3+10x}{(x^2+2)^2}$

8. ถ้า $y = \sqrt{x^2+8x+5}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{2x+8}{\sqrt{x^2+8x+5}}$ ข. $\frac{x-4}{\sqrt{x^2+8x+5}}$

ค. $\frac{2x-8}{\sqrt{x^2+8x+5}}$ ง. $\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x+5}}$

9. ถ้า $y = (6x^2-5x)^4$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $(4x-5)(2x^2-5x)^3$ ข. $(16x-20)(2x^2-5x)^3$

ค. $(2x^2-5x)(2x^2-5x)^3$ ง. $(16x+20)(2x^2-5x)^3$

10. ถ้า $y = \sqrt{x}-8)$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $-\frac{1}{2}$ ข. $\frac{1}{2}$

ค. $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ง. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

ยังจำกันได้ไหม

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $f(x), g(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x, c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ n เป็นเลขยกกำลัง

1. $\frac{dc}{dx} = 0$
2. $\frac{dx}{dx} = 1$
3. $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$
4. $\frac{d}{dx}c\,f(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$
5. $\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$
6. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}, g(x) \neq 0$
7. $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{c}\right] = \frac{1}{c}\frac{d}{dx}f(x), c \neq 0$
8. $\frac{d}{dx}\left[\frac{c}{f(x)}\right] = \frac{-c}{[f(x)]^2}\frac{d}{dx}f(x), f(x) \neq 0$
9. $\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}$
10. $\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n\,[f(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$

จากสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตข้างต้นสามารถพิสูจน์สูตรได้ดังต่อไปนี้

พิสูจน์สูตร $\frac{dc}{dx} = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

พิสูจน์ ให้ $f(x) = c$

จากบทนิยาม
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c-c}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 0$$
$$= 0$$

ดังนั้น $\frac{dc}{dx} = 0$

พิสูจน์สูตร $\frac{dx}{dx} = 1$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = x$ และ $f(x+\Delta x) = x + \Delta x$

จากบทนิยาม
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 1$$
$$= 1$$

ดังนั้น $\frac{dx}{dx} = 1$

พิสูจน์สูตร $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$

พิสูจน์ ให้ $y = h(x) = f(x)+g(x)$

$$h(x+\Delta x) = f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)$$

$$h(x+\Delta x)-h(x) = [f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)]-[f(x)+g(x)]$$

$$= [f(x+\Delta x)-f(x)]+[g(x+\Delta x)-g(x)]$$

ดังนั้น $\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

เนื่องจาก $f'(x)$ และ $g'(x)$ หาค่าได้ดังนี้

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

นั่นคือ $h'(x) = f'(x)+g'(x)$

หรือ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$

พิสูจน์สูตร $\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$ สามารถพิสูจน์ได้ในลักษณะเดียวกันกับ $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$

พิสูจน์สูตร $\frac{d}{dx}c\,f(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$

พิสูจน์ ให้ $g(x) = c\,f(x)$

$$g(x+\Delta x) = c\,f(x+\Delta x)$$

จากบทนิยาม $g'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\,f(x+\Delta x)-c\,f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c[f(x+\Delta x)-f(x)]}{\Delta x}$$

$$= c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= c\,f'(x)$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}c\,f(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$

พิสูจน์สูตร $\frac{d}{dx}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$

พิสูจน์ ให้ $y = f(x)\,.\,g(x)$ โดยที่ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x)-f(x)\,g(x)}{\Delta x}$$

นำ $f(x+\Delta x)\,g(x)$ บวกเข้าและลบออกจากเศษ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)\,g(x)+f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x)\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right)+g(x)\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)\right]$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$

พิสูจน์สูตร $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\left[g(x)\right]^2},\ g(x)\neq 0$

พิสูจน์ ให้ $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ โดยที่ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และ $g(x)\neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x)-f(x)\,g(x+\Delta x)}{\Delta x\left(g(x)\,g(x+\Delta x)\right)}$$

นำ $f(x)\cdot g(x)$ บวกเข้าและลบออกจากเศษ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f(x+\Delta x)\,g(x)-f(x)\,g(x)\right]-\left[f(x)\,g(x+\Delta x)-f(x)\,g(x)\right]}{\Delta x\left(g(x)\,g(x+\Delta x)\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[g(x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right]-\left[f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right]}{g(x)\,g(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{\lim_{\Delta x\to 0}g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x\to 0}g(x)\,g(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$$

พิสูจน์สูตร $\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}$

พิสูจน์ แสดงในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ $f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

กระจาย $(x+\Delta x)^n$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม ได้ดังนี้

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n\right] - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} n\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x^{n-1})$$

$$= n\,x^{n-1}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}$

พิสูจน์สูตร $\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$

พิสูจน์ **ให้** $y = [f(x)]^n$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]^n \frac{d}{dx}f(x)$$

$$= n[f(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$

ใบความรู้ 5.1

อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยการใช้สูตร
(Differentiation of Algebraic Function)

ฟังก์ชันพีชคณิต คือ ฟังก์ชันของพหุนาม ฟังก์ชันตรรกยะ และรวมถึงฟังก์ชันที่ได้จากการบวก ลบ คูณ หาร และการถอดรากของฟังก์ชันพหุนาม โดยนิยมหาอนุพันธ์โดยการใช้สูตรดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.1 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \frac{1}{2}x^8 + 3x^5 - 7x^2 + 10$

$\frac{d}{dx} c\,f(x) = c\frac{d}{dx} f(x)$

วิธีทำ

$$y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^8+3x^5-7x^2+10\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^8\right)+\frac{d}{dx}\left(3x^5\right)-\frac{d}{dx}\left(7x^2\right)+\frac{d}{dx}10$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}x^8 + 3\frac{d}{dx}x^5 - 7\frac{d}{dx}x^2 + 0$$

$$= \frac{1}{2}\left(8x^7\right)+3\left(5x^4\right)-7(2x)+0$$

$\frac{d}{dx}x^n =$

ดังนั้น $y' = 4x^7 + 15x^4 - 14x$

ตัวอย่างที่ 5.2 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \dfrac{5x^4-8x^3+3x^2+2x-10}{x^3}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{5x^4-8x^3+3x^2+2x-10}{x^3}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{5x^4}{x^3}-\frac{8x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{10}{x^3}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(5x-8+3x^{-1}+2x^{-2}-10x^{-3}\right) \\
&= 5\frac{d}{dx}x-\frac{d}{dx}8+3\frac{d}{dx}x^{-1}+2\frac{d}{dx}x^{-2}-10\frac{d}{dx}x^{-3} \\
&= 5(1)-0+3(-1x^{-2})+2(-2x^{-3})-10(-3x^{-4}) \\
&= 5-3x^{-2}-4x^{-3}+30x^{-4}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $y' = 5-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{30}{x^4}$

เลขยกกำลังฐานเหมือนกันหารกัน นำเลขยกกำลังมาลบกัน

$$\frac{d}{dx}c\,f(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$$

สูตรที่ใช้

$$\frac{dx}{dx} = 1\ ,\ \frac{dc}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}$$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มลบ $b^{-n} = 1/b^n$ ทำให้เกิดส่วนกลับหรือตัวผกผัน เลขยกกำลังจะเป็นกำลังบวก

ตัวอย่างที่ 5.3 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^4}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^4}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\right] + \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{x^3}\right] + \frac{d}{dx}\left[\frac{5}{x^4}\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right) + \frac{d}{dx}\left(2x^{-3}\right) + \frac{d}{dx}\left(5x^{-4}\right) \\
&= \frac{d}{dx}x^{-2} + 2\frac{d}{dx}x^{-3} + 5\frac{d}{dx}x^{-4} \\
&= -2x^{-3} + 2\left(-3x^{-4}\right) + 5\left(-4x^{-5}\right) \\
&= -2x^{-3} - 6x^{-4} - 20x^{-5}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $y' = -\frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4} - \frac{20}{x^5}$

ตัวอย่างที่ 5.4 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt[3]{x}} + 4x\sqrt{x}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt[3]{x}} + 4x\sqrt{x}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{d}{dx}\left(9x^{-\frac{1}{3}}\right) + \frac{d}{dx}\left(4x^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} + 9\frac{d}{dx}x^{-\frac{1}{3}} + 4\frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) + 9\left(-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right) + 4\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^4}} + 6\sqrt{x}$

ตัวอย่างที่ 5.5 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \frac{3}{x^5-2}+\frac{4}{x^2}$

$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n\,[f(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^5-2}+\frac{4}{x^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^5-2}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{x^2}\right)$$

$$= 3\frac{d}{dx}\left(x^5-2\right)^{-1}+4\frac{d}{dx}x^{-2}$$

$$= 3(-1)\left(x^5-2\right)^{-2}\frac{d}{dx}\left(x^5-2\right)+4(-2)x^{-3}$$

$$= \frac{-3}{\left(x^5-2\right)^2}\left(5x^4\right)-\frac{8}{x^3}$$

ดังนั้น $f'(x) = \frac{-15x^4}{\left(x^5-2\right)^2}-\frac{8}{x^3}$

ตัวอย่างที่ 5.6 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = (5+3x)^6$

$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n\,[f(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(5+3x)^6$$

$$= 6(5+3x)^5\frac{d}{dx}(5+3x)$$

$$= 6(5+3x)^5(3)$$

ดังนั้น $f'(x) = 18(5+3x)^5$

แบบฝึกทักษะที่ 5.1

คำชี้แจง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อละ 2 คะแนน)

1. **จงหาอนุพันธ์ของ** $f(x) = 6x^8$

วิธีทำ **พิจารณารูปของฟังก์ชัน แล้วนำสูตรเข้ามาใช้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน**

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. **จงหาอนุพันธ์ของ** $f(x) = -5x^6 + 2x^4 - x^3 + 8$

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^7}$

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = -2\left(3x - \frac{1}{x}\right)^{10}$

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \dfrac{1}{6+\sqrt[3]{x}}$

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ใบความรู้ 5.2

อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยการใช้สูตร(ต่อ)

(Differentiation of Algebraic Function)

ฟังก์ชันพีชคณิต คือ ฟังก์ชันของพหุนาม ฟังก์ชันตรรกยะ และรวมถึงฟังก์ชันที่ได้จากการบวก ลบ คูณ หาร และการถอดรากของฟังก์ชันพหุนาม โดยนิยมหาอนุพันธ์โดยการใช้สูตรดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 5.7 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \left(4x^2+5\right)\left(2x-\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(4x^2+5\right)\left(2x-\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(4x^2+5\right)\frac{d}{dx}\left(2x-\frac{1}{2}\right)+\left(2x-\frac{1}{2}\right)\frac{d}{dx}\left(4x^2+5\right) \\
&= \left(4x^2+5\right)(2)+\left(2x-\frac{1}{2}\right)(8x) \\
&= 8x^2+10+16x^2-4x
\end{aligned}$$

ดังนั้น $f'(x) = 24x^2-4x+10$

ตัวอย่างที่ 5.8 จงหาอนุพันธ์ของ $y = (2x+3)^2(x-1)$

$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)$

วิธีทำ

$$y' = \frac{d}{dx}(2x+3)^2(x-1)$$

$$= (2x+3)^2\frac{d}{dx}(x-1)+(x-1)\frac{d}{dx}(2x+3)^2$$

$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$

$$= (2x+3)^2(1)+(x-1)\left((2)(2x+3)\frac{d}{dx}(2x+3)\right)$$

$$= (2x+3)^2+4(x-1)(2x+3)$$

$$= (2x+3)^2+(4x-4)(2x+3)$$

$$= (2x+3)[(2x+3)+(4x-4)]$$

ดังนั้น $y' = (2x+3)(6x-1)$

ตัวอย่างที่ 5.9 จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \frac{x^2-1}{2x+3}$

$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}, g(x)\neq 0$

วิธีทำ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{2x+3}\right)$$

$$= \frac{(2x+3)\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)\frac{d}{dx}(2x+3)}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{(2x+3)(2x)-\left(x^2-1\right)(2)}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{4x^2+6x-2x^2+2}{(2x+3)^2}$$

ดังนั้น $f'(x) = \frac{2x^2+6x+2}{(2x+3)^2}$

ตัวอย่างที่ 5.10 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}, g(x)\neq 0$$

วิธีทำ

$$y' = \frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$= \frac{\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{dx} - x\frac{d}{dx}\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{2}} - x\left(\frac{1}{2}\left(1-4x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(1-4x^2\right)\right)}{\left(1-4x^2\right)}$$

$$= \frac{\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{2}} + 4x^2\left(1-4x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(1-4x^2\right)}$$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มลบ $b^{-n} = 1 / b^{n}$ ทำให้เกิดส่วนกลับหรือตัวผกผัน เลขยกกำลังจะเป็นกำลังบวก

$$= \frac{\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{2}} + \dfrac{4x^2}{\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{2}}}}{\left(1-4x^2\right)}$$

$$= \frac{\left(1-4x^2\right) + 4x^2}{\left(1-4x^2\right)\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ดังนั้น $$y' = \frac{1}{\left(1-4x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ตัวอย่างที่ 5.11 จงหาอนุพันธ์ของ $y = \sqrt[5]{6x^5+28}$

เปลี่ยนรูป รากที่ n ให้อยู่ในรูปเลขชี้กำลัง

$$(a)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

วิธีทำ

$$y' = \frac{d}{dx}\left(6x^5+28\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= \frac{1}{5}\left(6x^5+28\right)^{-\frac{4}{5}}\frac{d}{dx}\left(6x^5+28\right)$$

$$= \frac{1}{5\left(6x^5+28\right)^{\frac{4}{5}}}\left(30x^4\right)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^n = n\,[f(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}f(x)$$

ดังนั้น $y' = \dfrac{6x^4}{\left(6x^5+28\right)^{\frac{4}{5}}}$

ขอให้ทุกคนตั้งใจอ่าน ทบทวน

และฝึกทำแบบฝึกทักษะกันนะ

แบบฝึกทักษะที่ 5.2

คำชี้แจง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อละ 2 คะแนน)

1. **จงหาอนุพันธ์ของ** $f(x) = \sqrt{4x^3+18}$

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. **จงหาอนุพันธ์ของ** $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \left(\frac{2x}{1+x}\right)^4$

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. หาอนุพันธ์ของ $f(x) = \left(5x^2+3\right)\left(2x-\frac{1}{5}\right)$

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \left(\frac{3x+2}{2x-5}\right)^4$

วิธีทำ

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกทักษะเพิ่มเติม

คำชี้แจง จงเขียนเครื่องหมาย ✓ หรือ ✗ หน้าข้อต่อไปนี้

.....................1. $y = 8x - 9$ จะได้ $y' = 8$

.....................2. $y = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^{10}}$ จะได้ $y' = -\frac{5}{6} + \frac{8}{x^9} - \frac{10}{x^{11}}$

.....................3. $y = \sqrt{3+4x}$ จะได้ $y' = \frac{1}{2\sqrt{3+4x}}$

.....................4. $y = \frac{x+5}{x-5}$ จะได้ $y' = \frac{-10}{(x-5)^2}$

.....................5. $y = \frac{x+5}{x-5}$ จะได้ $y' = \frac{-10}{(x-5)^2}$

.....................6. $y = \sqrt[3]{5x^3+25}$ จะได้ $y' = \frac{5x^2}{\left(5x^3+25\right)^{\frac{2}{3}}}$

.....................7. $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$ จะได้ $y' = \frac{5x^4}{(1+x)^5}$

.....................8. $y = x^2\left(2x^4-5x+6\right)$ จะได้ $y' = 12x^5 - 15x^2 + 12x$

.....................9. $y = -3x^{-5} + 8\sqrt{x}$ จะได้ $y' = \frac{15}{x^6} + \frac{4}{\sqrt{x}}$

.....................10. $y = \frac{4x^3-9x^2+5x+7}{x^2}$ จะได้ $y' = 4 - \frac{1}{x} - \frac{14}{x^2}$

แบบทดสอบหลังเรียน

รายวิชาแคลคูลัส 1 (30000-1404) **ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.)**

เรื่อง การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน **เล่มที่ 5 การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยการใช้สูตร**

****

คำชี้แจง 1. แบบทดสอบชุดนี้มีทั้งหมด 10 ข้อ ใช้เวลา 15 นาที

2. ให้นักศึกษาทำเครื่องหมาย X ลงในช่องตัวเลือกในกระดาษคำตอบที่เห็นว่าถูกที่สุด

****

1. ถ้า $f(x) = 4x^2 + 5x$ แล้ว f′(3) มีค่าตรงกับข้อใด

   ก. 51 ข. 40

   ค. 36 ง. 15

2. ถ้า $y = 3x^6 + 2x^4 - 7$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

   ก. $3x^5+2x^3$ ข. $18x^5 + 8x^3$

   ค. $3x^6 + 2x^4$ ง. $18x^5 - 8x^3$

3. ถ้า $y = \frac{1}{2}x^6+3x^4 - 4x^2+7$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

   ก. $x^5+12x^3 - 8$ ข. $\frac{x^5}{2}+3x^3 - 4x$

   ค. $3x^5 + 12x^3 - 8x$ ง. $3x^5 + 7x^3 - 6x$

4. กำหนดให้ $y = (2x^2+5x)(3x - 4)$ แล้ว $f'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

   ก. 8 ข. 12

   ค. 19 ง. −19

5. กำหนดให้ $f(x) = (x^2 - 5)(3x + 4)$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

   ก. $9x^2 - 8x - 15$ ข. $9x^2 - 8x + 15$

   ค. $9x^2+8x + 15$ ง. $9x^2+8x - 15$

6. ถ้า $y = \sqrt{x^2+8x+5}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{2x+8}{\sqrt{x^2+8x+5}}$ ข. $\frac{x-4}{\sqrt{x^2+8x+5}}$

ค. $\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x+5}}$ ง. $\frac{2x-8}{\sqrt{x^2+8x+5}}$

7. ถ้า $y = (6x^2 - 5x)^4$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $(4x - 5)(2x^2 - 5x)^3$ ข. $(16x - 20)(2x^2 - 5x)^3$

ค. $(2x^2 - 5x)(2x^2 - 5x)^3$ ง. $(16x + 20)(2x^2 - 5x)^3$

8. ถ้า $y = \sqrt{x} - 8)$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $-\frac{1}{2}$ ข. $\frac{1}{2}$

ค. $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ง. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

9. ถ้า $y = \frac{5-2x}{5+2x}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{-20}{(5+2x)^2}$ ข. $\frac{-10}{(5+2x)^2}$

ค. $\frac{-15}{(5+2x)^2}$ ง. $\frac{-5}{(5+2x)^2}$

10. ถ้า $y = \frac{x^4-5}{x^2+2}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

ก. $\frac{4x^5+8x^4+10x}{(x^2+2)^2}$ ข. $\frac{4x^5-8x^4+10x}{(x^2+2)^2}$

ค. $\frac{2x^5+8x^3+10x}{(x^2+2)^2}$ ง. $\frac{2x^5-8x^3+10x}{(x^2+2)^2}$

กระดาษคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน

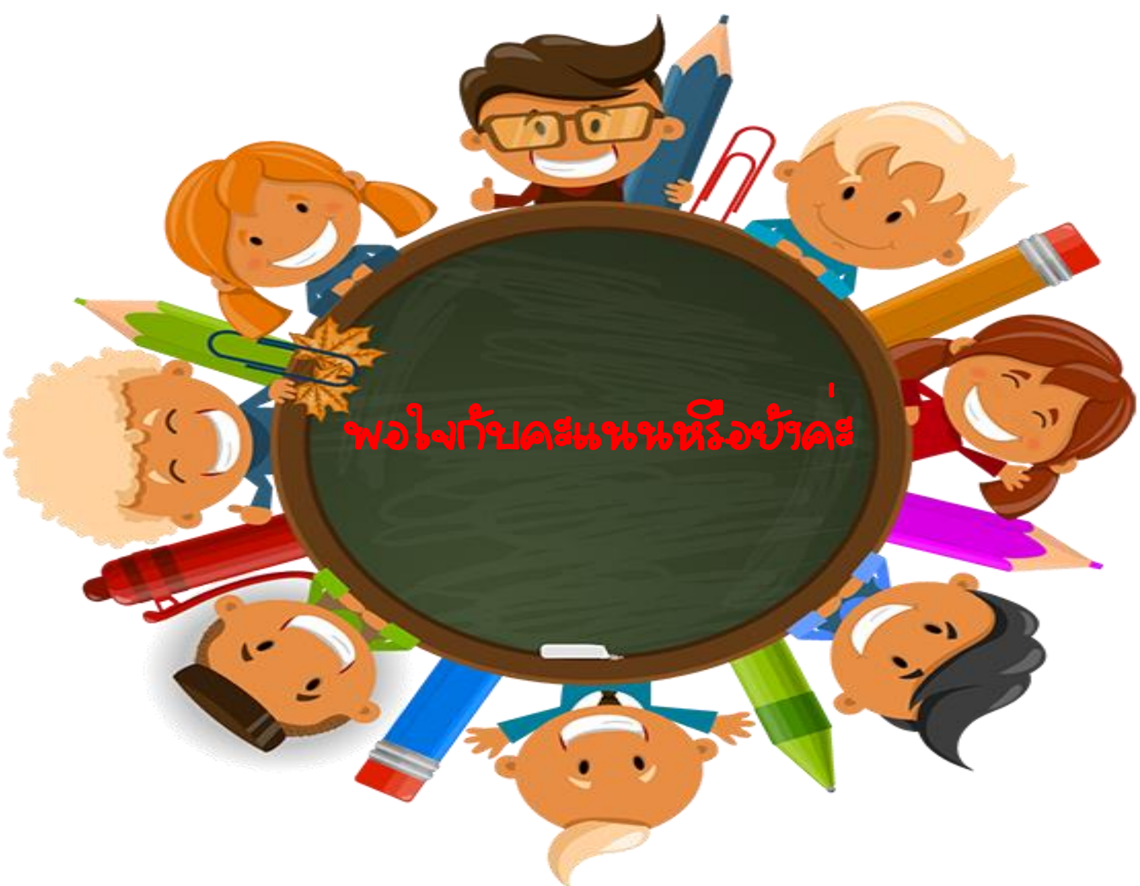
ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

แบบบันทึกคะแนนแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน
วิชา แคลคูลัส 1 เล่มที่ 5 เรื่องการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันพีชคณิตโดยการใช้สูตร

ชื่อ..ระดับ.........แผนกวิชา..............................เลขที่.......

วิทยาลัยการอาชีพวารินชำราบ อาชีวศึกษาจังหวัดอุบลราชธานี

รายการ	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	ความก้าวหน้า	คิดเป็นร้อยละ
การทดสอบก่อนเรียน	10			
การทดสอบหลังเรียน	10			



แบบบันทึกความก้าวหน้าของแบบฝึกทักษะ
วิชา แคลคูลัส 1 เล่มที่ 5 เรื่องการหาอนุพันธ์ฟังก์ชันพีชคณิตโดยการใช้สูตร

ชื่อ...ระดับ.........แผนกวิชา..............................เลขที่.......

วิทยาลัยการอาชีพวารินชำราบ อาชีวศึกษาจังหวัดอุบลราชธานี

แบบฝึกทักษะที่	คะแนนเต็ม	คะแนนที่ได้	คิดเป็นร้อยละ	ผ่านเกณฑ์	ไม่ผ่านเกณฑ์
5.1	10				
5.2	10				
รวมทั้งหมด	20				
เฉลี่ย					
คิดเป็นร้อยละ					

- ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนร้อยละ 75 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม
- ไม่ผ่านเกณฑ์ หมายความว่า ผู้เรียนได้คะแนนน้อยกว่าร้อยละ 75 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม

บรรณานุกรม

กมล เอกไทยเจริญ. **คณิตศาสตร์ ม. 6 เล่ม 5.** นนทบุรี : โรงพิมพ์เทพเนรมิตการพิมพ์ , 2521.

กมล เอกไทยเจริญ. **แคลคูลัส 2 และเทคนิคการใช้** Graphing Calculator. ภาควิชาคณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ธีรพงษ์การพิมพ์ , 2537.

เกียรติฟ้า ตั้งใจจิต และคณะ. แคลคูลัส. พิมพ์ครั้งที่ 1, กรุงเทพฯ : เพียร์สัน เอ็ดดูเคชั่นอินโดไชน่าจำกัด , 2548.

กฤษณะ เนียมมณี. แคลคูลัส สำหรับธุรกิจ 1. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. พิมพ์ครั้งที่ 1, กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์ , 2539.

จักรินทร์ วรรณโพธิ์กลาง. **คัมภีร์สาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ม.6.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์เรืองแสงการพิมพ์ , 2549.

ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง และคณะ. **คณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ อินทิกรัลและการประยุกต์.** ภาควิชา คณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์วงตะวัน จำกัด , 2542.

ธีรศักดิ์ อุรัจนานนท์. **แคลคูลัส 1 สำหรับวิศวกร.** พิมพ์ครั้งที่ 1 กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์สยามสปอร์ตซินดิเคท จำกัด , 2546.

นำชัย โพธิ์ทอง. **แคลคูลัส 1 .** พิมพ์ครั้งที่ 2 นนทบุรี : ศูนย์หนังสือเมืองไทย จำกัด , 2554.

วิรัตน์ สุวรรณาภิชาติ. แคลคูลัส 1. พิมพ์ครั้งที่ 3 , กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ,2551.

ศักดา กิ่งโก้. **แคลคูลัส 1.** นนทบุรี : โรงพิมพ์เจริญรุ่งเรืองการพิมพ์ , 2547.

สุกัญญา สนิทวงศ์ ณ อยุธยา และคณะ. **แคลคูลัส 1 ฉบับเสริมประสบการณ์.** พิมพ์ครั้งที่ 6 กรุงเทพฯ : วิทยพัฒน์ , 2552.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว ,2555.

สมัย เหล่าวานิชย์. **คณิตศาสตร์ ม. 4-5-6 สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม** นนทบุรี : โรงพิมพ์ไทเนรมิตกิจอินเตอร์ โปรเกรสซิฟ จำกัด, 2537.

สุรพล เสียงสนั่น. **แคลคูลัส 1 .** พิมพ์ครั้งที่ 1 นนทบุรี : สำนักพิมพ์เอมพันธ์, 2552.

อุบลวรรณา เงินวิจิตร. **แคลคูลัส 1 .** พิมพ์ครั้งที่ 1 นนทบุรี : สำนักพิมพ์เอมพันธ์, 2546.

Edwards and Penney. **Calculus and Analytic.** Geometry Hall International Editions, Inc. , 1986

Frank Ayres Jr. (1972) **Differentiation and Integreal Calculus. Creat Britain :** Mc Graw Hill

Howard Anton Irl C.Bivens Stephen Davis. (2010). **Calculus Late Transcendentals.** John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd

ภาคผนวก

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ค
2	ข
3	ง
4	ง
5	ก
6	ข
7	ค
8	ง
9	ข
10	ง

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน

ข้อ	คำตอบ
1	ก
2	ข
3	ค
4	ข
5	ง
6	ค
7	ข
8	ง
9	ก
10	ค

เฉลยแบบฝึกทักษะ 5.1

คำชี้แจง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อละ 1 คะแนน)

1. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = 6x^8$

วิธีทำ
$$f(x)' = \frac{d}{dx}(6x^8)$$
$$= 6\frac{d}{dx}x^8$$
$$\therefore f(x)' = 48x^7$$

2. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = -5x^6 + 2x^4 - x^3 + 8$

วิธีทำ
$$f(x)' = \frac{d}{dx}(-5x^6 + 2x^4 - x^3 + 8)$$
$$= -5\frac{d}{dx}x^6 + 2\frac{d}{dx}x^4 - \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}8$$
$$= -5(6x^5) + 2(4x^3) - 3x^2$$
$$\therefore f(x)' = -30x^5 + 8x^3 - 3x^2$$

3. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^7}$

วิธีทำ
$$f(x)' = \frac{d}{dx}(x^{-4} + x^{-7})$$
$$= \frac{d}{dx}x^{-4} + \frac{d}{dx}x^{-7}$$
$$= -4x^{-5} - 7x^{-8}$$
$$\therefore f(x)' = -\frac{4}{x^5} - \frac{7}{x^8}$$

4. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = -2\left(3x-\frac{1}{x}\right)^{10}$

วิธีทำ $f(x)' = -2\frac{d}{dx}\left(3x-\frac{1}{x}\right)^{10}$

$= -2\left(10\,(3x-\frac{1}{x})^{9}\right)\frac{d}{dx}(3x-x^{-1})$

$\therefore\ f(x)' = -20\,(3x-\frac{1}{x})^{9}(3+\frac{1}{x^{2}})$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \frac{1}{6+\sqrt[3]{x}}$

วิธีทำ $f(x)' = \frac{d}{dx}(6+\sqrt[3]{x})^{-1}$

$= -1(6+\sqrt[3]{x})^{-2}\frac{d}{dx}(6+(x)^{\frac{1}{3}})$

$= \frac{-1}{(6+\sqrt[3]{x})^{2}}\ \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{-1}{(6+\sqrt[3]{x})^{2}}\ \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

$\therefore\ f(x)' = \frac{-1}{(3\sqrt[3]{x^{2}}\ )(6+\sqrt[3]{x})^{2}}\ \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

เฉลยแบบฝึกทักษะ 5.2

1. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \sqrt{4x^3+18}$

วิธีทำ

$$f(x)' = \frac{d}{dx}(4x^3+18)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(4x^3+18)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(4x^3+18)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4x^3+18}}12x^2$$

$$\therefore\ f(x)' = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3+18}}$$

2. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$

วิธีทำ

$$f(x)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{4x-1}{x+2}\right)$$

$$= \frac{(x+2)\frac{d}{dx}(4x-1)-(4x-1)\frac{d}{dx}(x+2)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)(4)-(4x-1)(1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{4x+8-4x+1}{(x+2)^2}$$

$$\therefore\ f(x)' = \frac{9}{(x+2)^2}$$

3. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \left(\frac{2x}{1+x}\right)^4$

วิธีทำ $f(x)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^4$

$= 4\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3 \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{1+x}\right)$

$= 4\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3 \frac{(1+x)\frac{d}{dx}(2x)-(2x)\frac{d}{dx}(1+x)}{(1+x)^2}$

$= 4\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3 \frac{(1+x)(2)-(2x)(1)}{(1+x)^2}$

$= 4\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3 \frac{2x+2-2x}{(1+x)^2}$

$= 4\frac{(8x^3)}{(1+x)^3}\frac{2}{(1+x)^2}$

$\therefore\ f(x)' = \frac{64x^3}{(1+x)^5}$

4. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \left(5x^2+3\right)\left(2x-\frac{1}{5}\right)$

วิธีทำ $f(x)' = \frac{d}{dx}\left(5x^2+3\right)\left(2x-\frac{1}{5}\right)$

$= \left(5x^2+3\right)\frac{d}{dx}\left(2x-\frac{1}{5}\right)+\left(2x-\frac{1}{5}\right)\frac{d}{dx}\left(5x^2+3\right)$

$= (5x^2+3)(2)+(2x-\frac{1}{5})(10x)$

$= 10x^2+6+20x^2-2x$

$= 30x^2-2x+6$

$\therefore\ f(x)' = 2(15x^2-x+3)$

5. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = \left(\frac{3x+2}{2x-5}\right)^4$

วิธีทำ

$$f(x)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x+2}{2x-5}\right)^4$$

$$= 4\left(\frac{3x+2}{2x-5}\right)^3 \frac{d}{dx}\left(\frac{3x+2}{2x-5}\right)$$

$$= 4\left(\frac{3x+2}{2x-5}\right)^3 \frac{(2x-5)\frac{d}{dx}(3x+2)-(3x+2)\frac{d}{dx}(2x-5)}{(2x-5)^2}$$

$$= 4\left(\frac{3x+2}{2x-5}\right)^3 \frac{(2x-5)(3)-(3x+2)(2)}{(2x-5)^2}$$

$$= 4\left(\frac{3x+2}{2x-5}\right)^3 \frac{6x-15-6x-4}{(2x-5)^2}$$

$$= \frac{4(3x+2)^3}{(2x-5)^3}\,\frac{-19}{(2x-5)^2}$$

$$\therefore\ f(x)' = \frac{-76(3x+2)^3}{(2x-5)^5}$$

เฉลยแบบฝึกทักษะเพิ่มเติม

คำชี้แจง จงเขียนเครื่องหมาย ✓ หรือ ✗ หน้าข้อต่อไปนี้

.........✓......1 $y = 8x-9$ จะได้ $y' = 8$

.........✓......2 $y = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^{10}}$ จะได้ $y' = -\frac{5}{6} + \frac{8}{x^9} - \frac{10}{x^{11}}$

.........✗...... 3 $y = \sqrt{3+4x}$ จะได้ $y' = \frac{1}{2\sqrt{3+4x}}$

.........✓......4 $y = \frac{x+5}{x-5}$ จะได้ $y' = \frac{-10}{(x-5)^2}$

.........✗.......5 $y = \frac{x+5}{x-5}$ จะได้ $y' = \frac{-10}{(x-5)^2}$

.........✓......6. $y = \sqrt[3]{5x^3+25}$ จะได้ $y' = \frac{5x^2}{\left(5x^3+25\right)^{\frac{2}{3}}}$

.........✗......7. $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$ จะได้ $y' = \frac{5x^4}{(1+x)^5}$

.........✓......8. $y = x^2\left(2x^4-5x+6\right)$ จะได้ $y' = 12x^5 - 15x^2 + 12x$

.........✓......9. $y = -3x^{-5} + 8\sqrt{x}$ จะได้ $y' = \frac{15}{x^6} + \frac{4}{\sqrt{x}}$

.........✗.....10. $y = \frac{4x^3-9x^2+5x+7}{x^2}$ จะได้ $y' = 4 - \frac{1}{x} - \frac{14}{x^2}$